MATHÉMATIQUES – Liaison 2^{nde} / $1^{ère}$

Lycée Notre Dame des Minimes – Année scolaire 2022 - 2023

LIVRET DE VACANCES 2022

L'objet du présent livret de vacances est de te permettre d'aborder le programme de la spécialité mathématiques de première dans les meilleures conditions.
Le choix a été fait de mettre l'accent sur :

- le calcul littéral,
- la fonction carré,
- les probabilités

car ce seront les premières notions abordées à la rentrée.

Ce livret est composé *d'un rappel de cours* et *de deux fiches d'exercices*.
Le résumé de cours reprend la plupart des notions nécessaires pour résoudre les exercices proposés.

Tu retrouveras ce livret au format pdf sur le site :
http://minim.maths.free.fr/

Ce travail sera repris en classe à la rentrée.
Une *correction* des exercices proposés sera mise en ligne sur ce site à partir *du lundi 22 août 2022*.

Il a été choisi de cibler quelques chapitres pour ces révisions **mais** beaucoup d'autres notions de seconde sont à maîtriser pour réussir la classe de première en spécialité mathématiques.

Il est recommandé d'aller approfondir et compléter le travail proposé, en s'exerçant sur les notions non abordées dans ce livret (calcul numérique, fonctions, etc.).

Nous te conseillons avec insistance de faire l'e-cahier de vacances suivant
(un **parcours de révision en 18 jours / 30h** proposé sur le site d'Yvan Monka, Maths et tiques) :

https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/prep1

Les professeurs de mathématiques de première

Bonnes vacances et bonnes révisions !

Calcul littéral

I- La distributivité pour développer ou factoriser

Quels que soient les nombres k, a, b, c et d, on a :

$$k(a+b) = ka + kb \quad \text{(distributivité simple)}$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \quad \text{(double distributivité)}$$

Applications : 1°/ Développer $A = -3(4x-6)$ 2°/ Factoriser $B = -7x^2 + 42x$ 3°/ Développer $C = (2x-3)(-y+5)$

Corrections : voir au dos.

II- Les identités remarquables

Quels que soient les nombres a et b, on a :

• $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ • $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ • $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Applications de développement (D, E et F) et de factorisation (G, H et I) à l'aide des identités remarquables :

$D = (3x-5)^2$ $E = (-7x-3)^2$ $F = (2x+3)(-2x+3)$ $G = 9x^2 - 16$ $H = x^2 + 8x + 16$ $I = 9x^2 - 6x + 1$

Corrections : voir au dos.

III- Équation produit nul

Règle du produit nul : a et b étant deux nombres :

- si $a \times b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.
- si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $a \times b = 0$.

Équation produit nul : équation dont l'un des membres est un produit et dont l'autre membre est zéro.

Exemple : $(2x+5)(3x-4) = 0$ est une équation produit nul.

Méthode de résolution : Exemple, résolution de l'équation précédente : $(2x+5)(3x-4) = 0$

Cette équation est une équation produit nul. **Or, si un produit est nul alors l'un de ses facteurs est nul.**

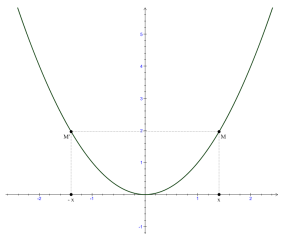
Donc si $(2x+5)(3x-4) = 0$ alors :

$2x + 5 = 0$ ou $3x - 4 = 0$

soit : $2x = -5$ ou $3x = 4$

soit : $x = -\frac{5}{2}$ ou $x = \frac{4}{3}$ Cette équation admet donc deux solutions : $-\frac{5}{2}$ et $\frac{4}{3}$.

Fonction carré



Définition : La fonction carré $f : x \longmapsto x^2$ est définie pour tout réel x.

Remarque : Sa courbe représentative est appelée **parabole**.
Dans un repère orthogonal, elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Propriété : La fonction carré est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0\ ; +\infty[$

Conséquence
- Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre, c'est-à-dire si $a < b$ alors $a^2 < b^2$
- Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre inverse, c'est-à-dire si $a < b$ alors $a^2 > b^2$

Probabilités

Définition : Une expérience est dite aléatoire lorsqu'elle a plusieurs issues (ou résultats ou événements élémentaires) possibles et que l'on ne peut ni prévoir, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée.

Exemple : On considère une urne opaque contenant des boules rouges, des boules vertes et des boules noires, indiscernables au toucher.
L'expérience « tirer une boule dans l'urne, noter sa couleur, puis la remettre dans l'urne » est une expérience aléatoire.

Définition : Pour décrire une expérience aléatoire, il faut préciser son déroulement et l'ensemble Ω de toutes les issues possibles. Cet ensemble Ω est appelé univers de l'expérience.

Dans le cas général, on note cet ensemble $\Omega = \{ x_1\ ; x_2\ ; \ldots ; x_n \}$, avec les x_i représentant les événements élémentaires.

Définition : On considère une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{ x_1 ; x_2 ; ... ; x_n \}$. On appelle événement toute partie (ou sous-ensemble) de Ω, c'est-à-dire tout ensemble formé d'une ou de plusieurs issues de cette expérience.
Pour un événement A de Ω, on note $\Omega \subset$ E (lire « A est une partie de Ω »).

Remarque : On dit qu'une issue ***a*** qui est dans la partie A de Ω **réalise** l'événement A ; on note ***a*** $\in$ A (lire « ***a*** appartient à A »).

Définition : On considère une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{ x_1 ; x_2 ; ... ; x_n \}$.

- Lorsqu'un événement n'a aucune chance de se produire, on parle d'*événement* **impossible** et on note le $\emptyset$.
- Lorsqu'un événement se produit à chaque fois, on parle d'*événement* **certain**. Il s'agit de l'événement Ω .
- Deux *événements* **incompatibles** sont des événements qui ne peuvent pas se produire en même temps.
- L'*événement* **contraire** d'un événement A est celui qui se réalise lorsque A ne se réalise pas. On le note $\overline{\text{A}}$.

• Définir une loi de probabilité sur Ω,
c'est associer à chaque issue x_i un nombre p_i , ***positif ou nul*** de telle façon que : $\boldsymbol{p_1 + p_2 + \ ... + p_n = 1}$.
Ce nombre p_i est appelé **probabilité** de l'issue x_i.

Intuitivement, la probabilité d'un événement indique la « chance » qu'a cet événement de se produire. Elle s'exprime généralement sous la forme d'un quotient.

<u>Définir</u> la ***loi de probabilité*** d'une expérience aléatoire <u>c'est donner</u> ***la probabilité*** **(*c'est-à-dire le nombre positif ou nul*)** associée à chaque issue.

• Dans le cas où l'on associe à chacune des *n* issues d'une expérience aléatoire la même probabilité *p*, on parle de situation de **loi équirépartie** ou de **situation d'équiprobabilité**.

Définition : Une loi de probabilité est définie sur un ensemble Ω. La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui le réalisent. On la note ***P*(A).**

Conséquences :

- aucun événement ne réalise l'événement impossible, donc $\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$
- l'événement certain est réalisé par chacune des issues de Ω, donc ***P*(Ω) = 1**
- pour tout événement A, $\boldsymbol{0 \leq P(\text{ A }) \leq 1}$

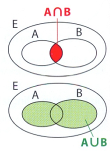
Propriétés : • Dans une situation ***d'équiprobabilité***, la probabilité d'un événement A est donnée par :

$$P(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ \ cas\ possibles} = \frac{nombre\ d'issues\ dans\ A}{nombre\ d'issues\ dans\ E}$$

• Pour tout événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Définition : A et B sont deux événements.
L'**intersection** de A et B est l'événement, A $\cap$ B, formé des issues qui réalisent à la fois l'événement A ***et*** l'événement B.
La **réunion** de A et B est l'événement, noté A $\cup$ B, formé des issues qui à la fois l'événement A ***ou*** l'événement B, c'est-à-dire ***au moins*** l'un des deux.

On peut représenter la réunion et l'intersection de deux événements par un diagramme :



Propriété : Pour tous événements A et B, on a : P(A $\cup$ B) = P(A) + P(B) – P(A $\cap$ B)

Cas particulier : lorsque deux événements A et B sont incompatibles, c'est-à-dire lorsque A $\cap$ B = $\emptyset$, on a alors :
P(A $\cup$ B) = P(A) + P(B) car on a alors : P(A $\cap$ B) = 0.

Corrections des Applications « distributivité »

1°/ Développer $A = -3(4x - 6)$
$A = -3 \times 4x + (-3) \times (-6)$
$A = -12x + 18$

2°/ Factoriser $B = -7x^2 + 42x$
$B = -1 \times 7x \times x + 7x\ \times 6$
$B = 7x(-x + 6)$

3°/ Développer $C = (2x - 3)(-y + 5)$
$C = 2x \times (-y) + 2x \times 5 - 3 \times (-y) - 3 \times 5$
$C = -2xy + 10x + 3y - 15$

Correction des Applications « Identités remarquables »

$D = (3x - 5)^2$
$D = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2$
$D = 9x^2 - 30x + 25$
$G = 9x^2 - 16$
$G = (3x)^2 - 4^2$
$G = (3x - 4)(3x + 4)$

$E = (-7x - 3)^2$
$E = (-7x)^2 + 2 \times (-7x) \times (-3) + (-3)^2$
$E = 49x^2 + 42x + 9 \ = (7x + 3)^2$
$H = x^2 + 8x + 16$
$H = x^2 + 2 \times 4 \times x + 4^2$
$H = (x + 4)^2$

$F = (2x + 3)(-2x + 3) = (3 + 2x)(3 - 2x)$
$F = 3^2 - (2x)^2$
$F = 9 - 4x^2$
$I = 9x^2 - 6x + 1$
$I = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2$
$I = (3x - 1)^2$

Fiche 1 : Calcul littéral

Exercice 1 : Utilisation des identités remarquables.

1) Développer les expressions suivantes :

A = $(2x+3)^2$ B = $(4x-1)^2$ C = $-(5-x)^2$

D = $(4x-1)(4x+1)$ E = $(-5x-7)^2$ F = $(-x+8)(x+8)$

2) Factoriser les expressions suivantes :

G = $4x^2-12x+9$ H = $x^2-10x+25$ I = $-9+36x^2$

J = $(2x-1)^2-9$ K = $49-(3x-2)^2$ L = $4x^2+25+20x$

Exercice 2 : Factorisation

Factoriser les expressions suivantes :

A = $-4x^2+8x$ B = $9xy-3ax$ C = $(x-3)^2-(2x-5)^2$

Exercice 3 :

$A(x)=(5x-3)(2x+4)-(5x-3)(3x+2)$ $B(x)=(3x+2)^2-(4x+1)^2$

a) Développe et ordonne les expressions $A(x)$ et $B(x)$.

b) Factorise au maximum les expressions $A(x)$ et $B(x)$.

c) Résous les équations $A(x)=0$ et $B(x)=3$.

Exercice 4 :

Résous, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $(2x-3)(5x-1)(x^2+1)=0$ **b)** $-0{,}5\,(2x-3)^2=0$

c) $x^2+5x=0$ **d)** $4x^2-9=(x+2)(2x+3)$

Exercice 5 :

En utilisant des tableaux de signes, résous dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

a) $(3x-1)(x+4)<0$ **b)** $\frac{-2x+7}{x-3}\geq 0$ **c)** $(4x-1)^2-9>0$

d) $\frac{x-3x^2}{x+2}\leq 0$ **e)** $x^2\leq 25+(x-5)(3x+1)$ **f)** $\frac{2x-1}{x-4}\leq 1$

Fiche 2 : Fonction carré - Probabilités

Exercice 1 :

Donner un encadrement de x^2 sachant que :
a) $-3{,}5 \leq x \leq -1$ b) $0{,}5 \leq x \leq 2{,}5$ c) $x \in]-2\,;1]$ d) $x \in [-2\,;\,3{,}12]$

Exercice 2 :

Comparer sans aucun calcul et en justifiant à l'aide de propriétés de la fonction carré :
a) $2{,}356^2$ et $2{,}5^2$ b) $(-1{,}08)^2$ et $(-1{,}2)^2$ c) $(-1{,}56)^2$ et $1{,}57^2$ d) $(-2{,}56)^2$ et $0{,}8^2$

Exercice 3 :

À l'aide de la représentation graphique de la fonction carré, trouver les valeurs de x telles que :
1. a) $x^2 \leq 4$ b) $x^2 > 4$ c) $x^2 < 2$ d) $x^2 \geq 1$
2. a) $x^2 \leq -5$ b) $x^2 > -3$ c) $x^2 > 0$

Exercice 4 :

TOM écrit au hasard dans un certain ordre les trois lettres de son prénom. Quelle est la probabilité qu'il écrive :
a) TOM ? b) MOT ? c) un mot commençant par T ? d) un mot contenant exactement 2 consonnes ?

Exercice 5 :

On tire au hasard une boule dans une urne contenant 20 boules indiscernables au toucher.
1. Quel modèle de probabilité peut être associé à cette expérience ?
2. Parmi les 20 boules, il y a 6 boules rouges, 10 noires et 4 vertes.
   Calculer la probabilité des événements : R « la boule est rouge » et N « la boule est noire ».
3. Parmi les 20 boules, r sont rouges et v sont vertes.
   Retrouver la composition de l'urne sachant que $P(\text{R}) = 0{,}25$ et $P(\text{N}) = 0{,}15$

Exercice 6 :

Deux sélectionneurs, Max et Léon, s'apprêtent à donner leur avis sur la sélection d'un joueur.
On note M et L, respectivement, les événements : « Max est pour » et « Léon est pour ».
1. Expliciter clairement, en français, les événements : $\overline{M}$; $M \cap L$; $M \cup L$; $\overline{M} \cap L$; $\overline{M} \cap \overline{L}$
   Que peut-on dire de $M \cup L$ et de $\overline{M} \cap \overline{L}$?
2. On donne : $P(M \cap L) = 0{,}6$; $P(M) = 0{,}8$ et $P(L) = 0{,}7$. Calculer : $P(M \cup L)$ et $P(\overline{M} \cap \overline{L})$.

Exercice 7 :

Une enquête réalisée par un journal local révèle que 48% de leurs abonnés lisent à chaque fois la page Spectacles, que 67% ne manquent pas la page Sports et que 27% lisent toujours ces deux pages avec le même intérêt. Calculer la probabilité qu'un abonné pris au hasard :
a) lise au moins l'une de ces deux pages ;
b) ne lise pas la page Spectacle ;
c) lise la page Sport et pas la page Spectacle.

Exercice 8 :

Le code d'un antivol de vélo est un nombre de trois chiffres, où chaque chiffre peut être 0, 1, 2 ou 3.
Albert choisit un code au hasard.
1. Illustrer la situation par un arbre pondéré et en déduire le nombre de codes possibles.
2. Quelle est la probabilité que le code d'Albert comporte 3 chiffres distincts ?