Fonctions

Exemples de fonctions

Un exemple, la fonction carré

On la note f: $x \mapsto x^2$.

Par cette fonction, l'image de 0 est 0, l'image de 1 est 1, l'image de 2 est 4 etc.

On peut indiquer tout cela dans un tableau de valeurs.

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9

L'image de 2 est 4.

On dit que 2 est un antécédent de 4 (il y en a un autre: - 2 est aussi un antécédent de 4).

Pour tracer la représentation graphique, on utilise les renseignements de ce tableau:

f: $-3 \mapsto 9$ donc le point de coordonnées (- 3 ; 9) appartient à la courbe.

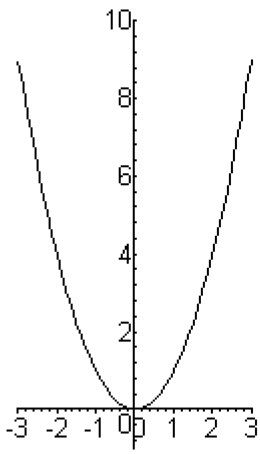
f: $-2 \mapsto 4$ donc le point de coordonnées (- 2 ; 4) appartient à la courbe.

f: $-1 \mapsto 1$ donc le point de coordonnées (- 1 ; 1) appartient à la courbe.

f: $0 \mapsto 0$ donc le point de coordonnées (0 ; 0) appartient à la courbe.

f: $1 \mapsto 1$ donc le point de coordonnées (1 ; 1) appartient à la courbe.

etc.



Finalement, cette courbe est l'ensemble des points de coordonnées de la forme (x ; x^2).

Définition: la représentation d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées (x ; $f(x)$).

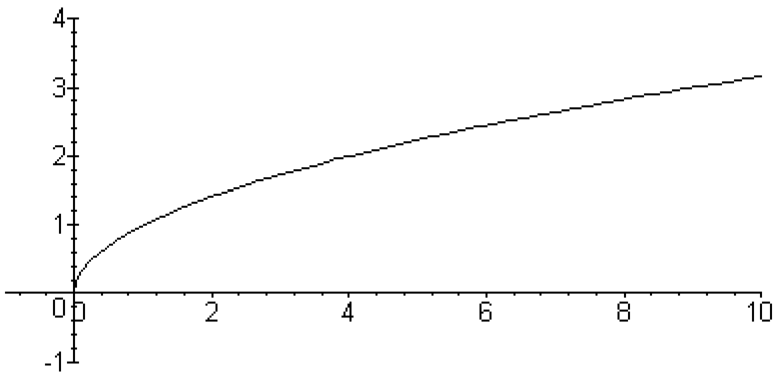
Attention: l'image de 2 est 4. Cela se note f: $2 \mapsto 4$ ou $f(2) = 4$.

Ces deux notations sont correctes et signifient la même chose.

On est prié de ne pas mélanger les deux.

<u>Un autre exemple, la fonction racine</u>: $f: x \mapsto \sqrt{x}$.

x	0	1	4	9	16
$\sqrt{x}$	0	1	2	3	4

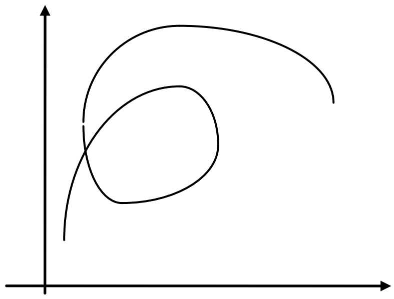


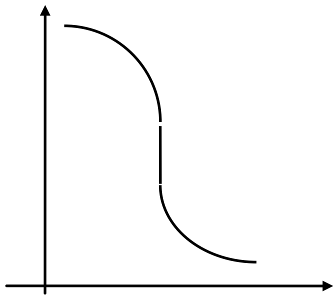
Cette représentation est construite comme tout à l'heure:
f: $0 \mapsto 0$ donc le point de coordonnées (0 ; 0) appartient à la courbe.
f: $\frac{1}{4} \mapsto \frac{1}{2}$ donc le point de coordonnées ($\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$) appartient à la courbe.
f: $1 \mapsto 1$ donc le point de coordonnées (1 ; 1) appartient à la courbe.
f: $4 \mapsto 2$ donc le point de coordonnées (4 ; 2) appartient à la courbe.
f: $9 \mapsto 3$ donc le point de coordonnées (9 ; 3) appartient à la courbe.
etc.

Rq: les nombres positifs ont une image, les nombres négatifs n'ont pas d'image.
On dit que <u>l'ensemble de définition</u> de la fonction racine est [0 ; + ∞ [.
Définition: l'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des nombres qui ont une image par cette fonction.
Rq: par la fonction carré, tous les nombres ont une image. L'ensemble de définition de la fonction carré est donc] - ∞ ; + ∞ [.

On peut maintenant donner une <u>définition d'une fonction</u>.
Définition: une fonction est une relation qui, à tout nombre, associe un nombre ou aucun nombre.
Rq: un nombre peut avoir une image. Un nombre peut ne pas avoir d'image.

En revanche, il est interdit de donner plusieurs images à un nombre, sinon ce n'est pas une fonction. Ces deux courbes ne sont donc pas des représentations de fonctions.





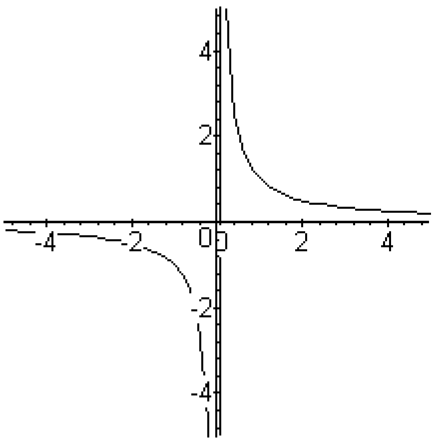
<u>Un autre exemple, la fonction inverse</u> f: $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Vous devez savoir que 0 n'a pas d'inverse (ou, ce qui revient au même, qu'on ne divise pas par 0).

0 n'a donc pas d'image,

l'ensemble de définition de la fonction inverse est] - ∞ ; 0 [∪] 0 ; + ∞ [.

x	- 4	- 2	- 1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	- 1	- 2	- 4		4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



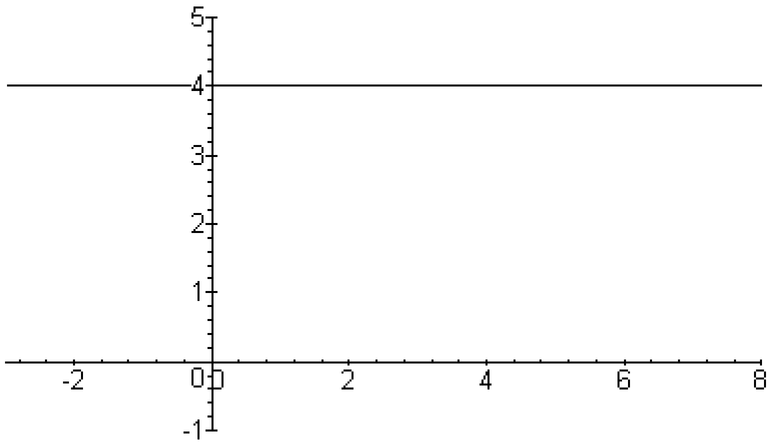
Un autre exemple, une fonction constante.

f: $x \mapsto 4$.

Cela signifie que l'image de n'importe quel nombre est 4.

On dit que f est une fonction constante.

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
$f(x)$	4	4	4	4	4	4	4



Recherche des antécédents

Exercice

f: $x \mapsto 3x - 2$

1/ Donner l'image de 4.

2/ Donner l'antécédent de 4.

1/ L'image de 4 est $f(4) = 3 \times 4 - 2 = 10$.

$$4 \xrightarrow{f} 10$$

2/ Il n'est pas évident de trouver l'antécédent de 4.

Appelons x l'antécédent de 4.

x est le nombre dont l'image est 4.

$$x \xrightarrow{f} 4$$

x vérifie donc $f(x) = 4 \Leftrightarrow 3x - 2 = 4$

$\Leftrightarrow 3x = 6$

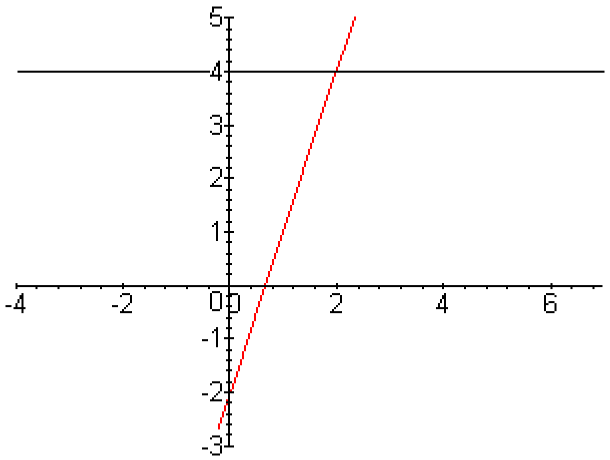
$\Leftrightarrow x = 2$

L'antécédent de 4 est 2.

Exercice
g: $x \mapsto x^2 - 2$
Donner les antécédents de 3.
On trouve $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.

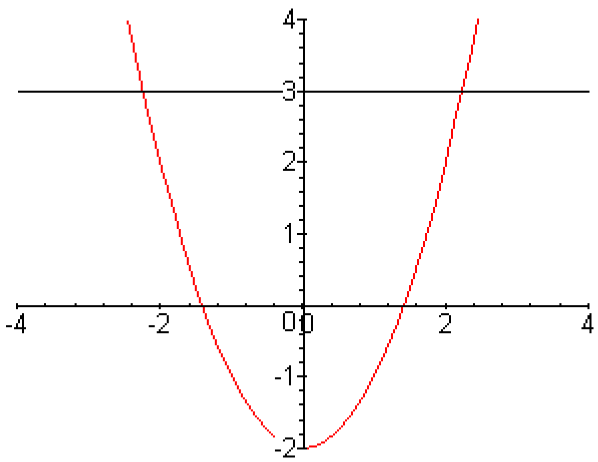
Résolution graphique d'équations

Nous avons calculé plus haut l'antécédent de 4 par la fonction f: $x \mapsto 3x - 2$.
Représentons.



Le point d'intersection entre ces deux droites a pour coordonnées 2 et 4.
On voit très bien sur ce graphique que l'antécédent de 4 est 2.
Pour calculer l'antécédent de 4, nous avions résolu l'équation $f(x) = 4$.
Autrement dit, ce graphique permet de résoudre l'équation $f(x) = 4$.

Résolution graphique de l'équation $x^2 - 2 = 3$.
Représentons g: $x \mapsto x^2 - 2$ et donnons les antécédents de 3.



La courbe et la droite ont deux points d'intersection
donc l'équation $x^2 - 2 = 3$ a deux solutions.

Ces deux solutions sont les abscisses de ces points d’intersection donc

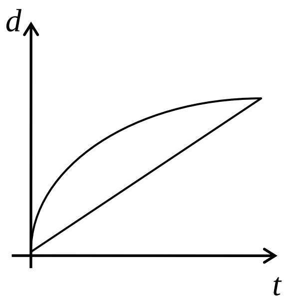
$$S = \{ -2{,}2 \; ; \; 2{,}2 \} \text{ environ}$$

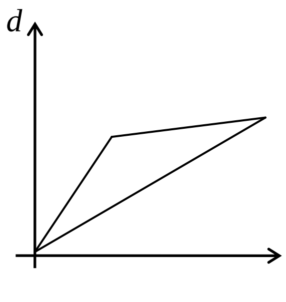
Fonctions du temps

Exemple: Alex et Cyprien font la course. Ils partent en même temps du même endroit. Alex court à vitesse constante. Cyprien part très vite mais se fatigue et court de moins en moins vite.
Alex et Cyprien arrivent en même temps.

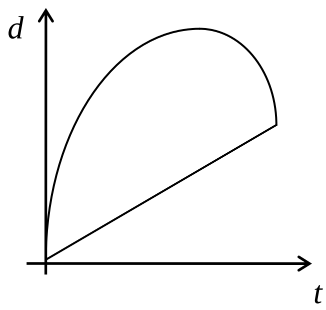
Représenter $d\,(\,t\,)$ et $v\,(\,t\,)$.

On peut représenter la distance au point de départ:



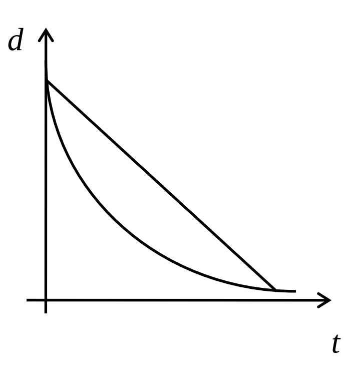


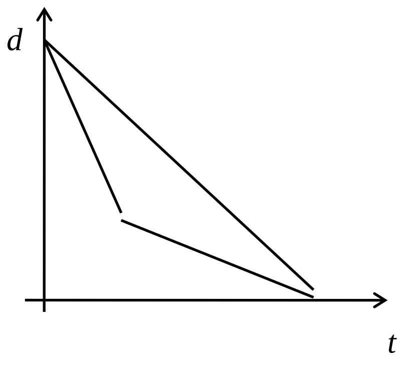
Point de côté.



Cyprien est allé trop loin.

On peut aussi représenter la distance au point d’arrivée:





Exemple: représenter, en fonction du temps, la distance parcourue par un métro en tenant compte des arrêts aux stations.
Représenter la vitesse de ce métro en fonction du temps.

Exemple: on plonge un objet très chaud dans de l’eau froide, représenter en fonction du temps la température de l’objet et la température de l’eau. Deux cas: il y a beaucoup d’eau et il y a peu d’eau.

Exemple: vous mettez un thermomètre dans le jardin. Représenter en fonction du temps la température indiquée par le thermomètre pendant 24 heures.
Représenter sur le même graphique la température indiquée par un autre thermomètre placé à l’intérieur d’une maison bien isolée mais pas chauffée.

Exemple: c’est l’hiver. Dans une maison froide il y a deux thermomètres, un sur un radiateur, un au milieu de la pièce. On branche le radiateur. Représenter en fonction du temps la température indiquée par chaque thermomètre.
Mêmes questions quand on coupe le chauffage.