

Puissances

$$5^2 \times 5^4 = (5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5) \\ = 5^{2+4}$$

Par exemple, $5 \times 5^3 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$.

Attention, les calculs de puissance sont prioritaires sur les autres opérations donc $5 \times 5^3 = 5 \times 125$ et pas 25^3 .

$$(5^2)^4 = (5 \times 5) \times (5 \times 5) \times (5 \times 5) \times (5 \times 5) \\ = 5^{2 \times 4}$$

$$(5^4)^2 = (5 \times 5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5) \\ = 5^{4 \times 2}$$

$$\frac{5^5}{5^2} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5} \\ = 5^3 \\ = 5^{5-2}$$

Par exemple, $3x^4 - 5x^3 + x + 7 = 3x^4 - 5\frac{x^4}{x} + \frac{x^4}{x^3} + 7\frac{x^4}{x^4} = x^4(3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^4})$.

$$(5 \times 7)^4 = (5 \times 7) \times (5 \times 7) \times (5 \times 7) \times (5 \times 7) \\ = 5 \times 7 \times 5 \times 7 \times 5 \times 7 \times 5 \times 7 \\ = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \\ = 5^4 \times 7^4$$

Formules: $x^a \times x^b = x^{a+b}$

$$(x^a)^b = x^{a \times b}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \quad (\text{si } x \neq 0)$$

$$(x \times y)^a = x^a \times y^a$$

Exposants négatifs

$$5^3 \times 5^{-3} = 5^{3-3} = 5^0 \\ = \frac{5^3}{5^3} \\ = 1$$

donc $5^3 \times 5^{-3} = 1$ donc $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$.

On en conclut également que $5^0 = 1$.

Formules: $x^{-a} = \frac{1}{x^a} \quad x^0 = 1$

Attention: $0^{-3} = \frac{1}{0^3} = \frac{1}{0}$ qui n'existe pas car on ne peut pas diviser par 0.

On peut voir les exposant négatifs autrement :

$$\begin{array}{ccccccc} 5^1 & & 5^2 & & 5^3 & & 5^4 \\ \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \\ \times 5 & & \times 5 & & \times 5 & & \end{array}$$

On peut continuer indéfiniment vers la droite.

Et vers la gauche ?

Si l'on veut continuer vers la gauche, il faut mettre 5^0 . Combien vaut 5^0 ?

$$\begin{array}{ccccccc} 5^0 & & 5^1 & & 5^2 & & 5^3 & & 5^4 \\ \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \\ \times 5 & & \times 5 & & \times 5 & & \times 5 & & \end{array}$$

Là, on peut écrire que $5^0 \times 5 = 5$. Donc $5^0 = 1$.

Si l'on continue encore vers la gauche, il faut mettre 5^{-1} . Combien vaut 5^{-1} ?

$$\begin{array}{ccccccc} 5^{-1} & & 5^0 & & 5^1 & & 5^2 & & 5^3 & & 5^4 \\ \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \\ \times 5 & & \times 5 & & \times 5 & & \times 5 & & \times 5 & & \end{array}$$

Là, on peut écrire que $5^{-1} \times 5 = 1$. Donc $5^{-1} = \frac{1}{5}$.

L'étape suivante nous dit que $5^{-2} = \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 5^{-2} & & 5^{-1} & & 5^0 & & 5^1 & & 5^2 & & 5^3 & & 5^4 \\ \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \\ \times 5 & & \times 5 & & \times 5 & & \times 5 & & \times 5 & & \times 5 & & \end{array}$$

Finalement: $5^0 = 1$; $5^{-1} = \frac{1}{5}$; $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$; $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$ etc.