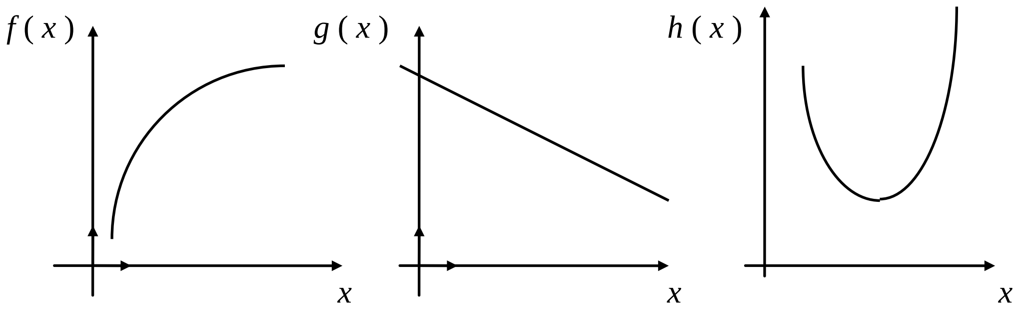
Croissance d’une fonction

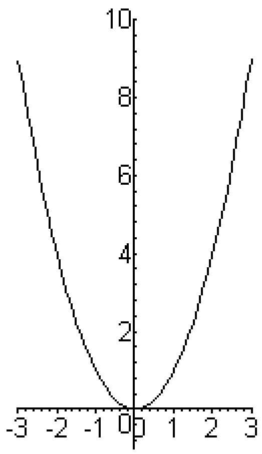
Première définition de la croissance

Définition: une fonction croissante est une fonction dont la représentation graphique monte.
Définition: une fonction décroissante est une fonction dont la représentation graphique descend.



f est croissante   *g* est décroissante   *h* n’est ni croissante ni décroissante.

La fonction carré $x \mapsto x^2$

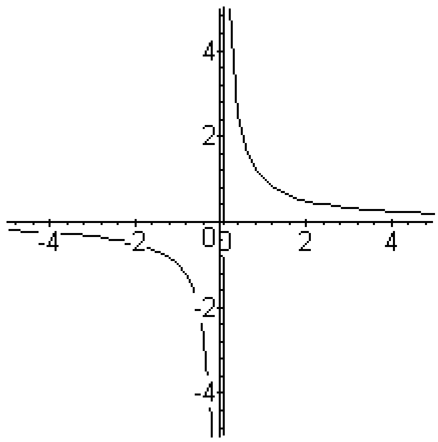


La fonction carré n’est ni croissante ni décroissante.
La fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$.
La fonction carré est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Ces renseignements peuvent être présentés dans un tableau de variation.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

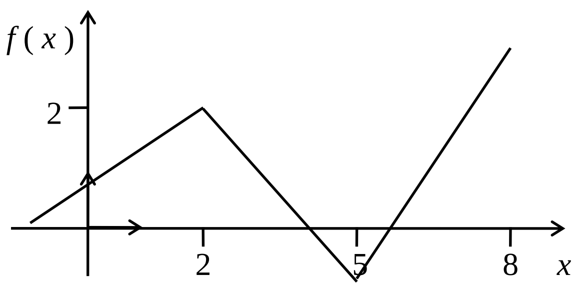


x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘

Comme dans les tableaux de signe,
la double barre signifie qu'il y a une opération interdite:

0 n'a pas d'inverse.

<u>Un autre exemple</u>



Cette fonction est croissante sur [- 1 ; 2] , décroissante sur [2 ; 5] et croissante sur [5 ; 8] .

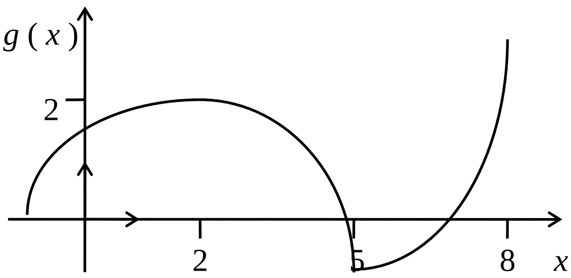
Le maximum de la fonction f est 3, il est atteint pour $x = 8$.
Le minimum de la fonction f est - 1, il est atteint pour $x = 5$.

Voici le <u>tableau de variations</u> :

x	-1		2		5		8
			2				3
$f(x)$		↗		↘		↗	
	0				-1		

À une fonction ne correspond qu'un tableau de variations mais à un tableau de variations correspond plusieurs fonctions.

Par exemple, le tableau de variations de la fonction f est aussi le tableau de variations de la fonction g.



Bref, le tableau de variations donne beaucoup moins d'informations sur la fonction que la courbe.

Par exemple, le tableau de variations ne permet pas de lire l'image de 0.

<u>Deuxième définition de la croissance</u>
Reprenons ce tableau de variations.

x	-1	2	5	8
$f(x)$	0	$\nearrow$ 2	$\searrow$ -1	$\nearrow$ 3

La fonction f est croissante sur $[-1 ; 2]$.
Les nombres 0 et 1 appartiennent tous les deux à $[-1 ; 2]$.
Dans ces conditions, le tableau montre clairement que $f(0) < f(1)$.
De même, la fonction f est décroissante sur $[2 ; 5]$ et
le tableau montre tout aussi clairement que $f(3) > f(4)$.

$0 < 1$ et $f(0) < f(1)$,
l'ordre est <u>conservé</u>,
l'image du petit nombre est <u>inférieure</u> à l'image du grand nombre.
C'est ce qui se passe chaque fois qu'on a une fonction <u>croissante</u>.

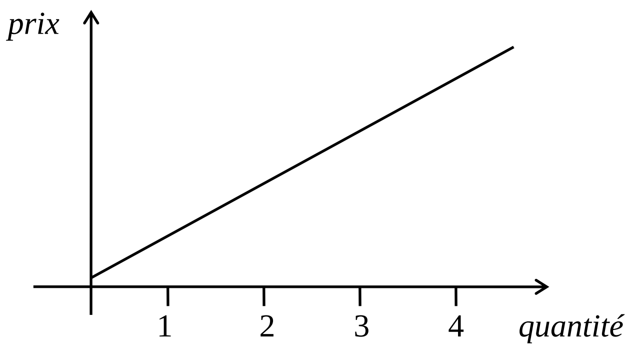
$3 < 4$ et $f(3) > f(4)$,
l'ordre est <u>renversé</u>,
l'image du petit nombre est <u>supérieure</u> à l'image du grand nombre.
C'est ce qui se passe chaque fois qu'on a une fonction <u>décroissante</u>.

<u>Définition</u> : une fonction croissante est une fonction qui conserve l'ordre.
<u>Définition</u> : une fonction décroissante est une fonction qui renverse l'ordre.

Remarque: en revanche, on ne peut pas comparer $f(3)$ et $f(6)$.
Le tableau permet de dire que $1 < f(3) < 2$ et $1 < f(6) < 3$.
Cela ne permet pas de comparer $f(3)$ et $f(6)$.

Exemples concrets

quantité de chocolat achetée $\mapsto$ prix payé

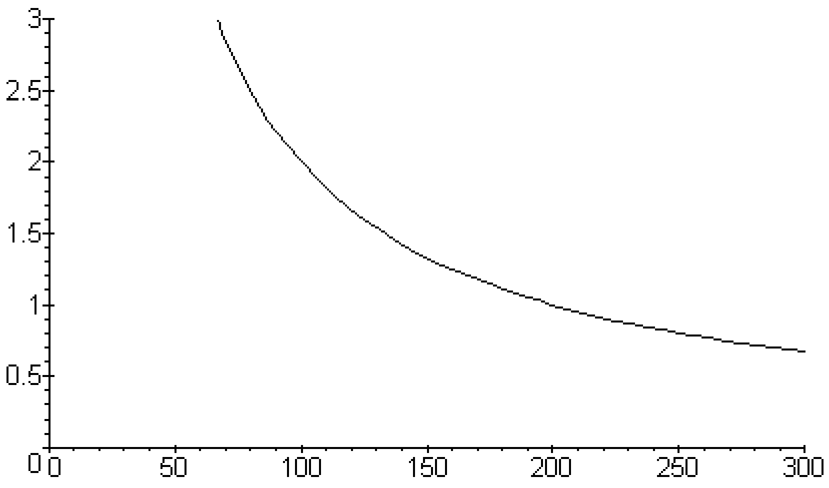


1 kg coûte moins que 2 kg , 2 kg coûtent moins que 3 kg , 3 kg coûtent moins que 4 kg etc.
Une petite quantité a un petit prix, une grande quantité a un grand prix.
Ici encore, il y a conservation de l'ordre.
On dit donc que cette fonction est croissante.

C'est la même situation que pour la fonction f croissante sur [- 1 ; 2] :

$-1 < 0$ et $f(-1) < f(0)$.

Autre exemple
Je dois parcourir 100 km. Je considère la fonction
vitesse $\mapsto$ temps de parcours



Cette fonction est décroissante, elle renverse l'ordre : une petite vitesse donne un grand temps de parcours ; une grande vitesse donne un petit temps de parcours

C'est la même situation que pour la fonction f décroissante sur [2 ; 5] :

$2 < 4$ et $f(2) > f(4)$.

Questions

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont croissantes, lesquelles sont décroissantes ?

somme dépensée $\mapsto$ somme restante
durée $\mapsto$ distance parcourue
altitude $\mapsto$ pression atmosphérique
altitude $\mapsto$ température
vitesse d'une voiture $\mapsto$ consommation de cette voiture
kilométrage d'une voiture d'occasion $\mapsto$ prix de vente de cette voiture

Démonstrations

f: $x \mapsto 4x - 1$
Montrons que f est croissante.
Il faut montrer que si je choisis deux nombres, quels que soient ces nombres, l'image du petit est inférieure à l'image du grand.
J'appelle ces deux nombres a et b et je décide que c'est a le plus petit.

Si $a < b$, alors $4a < 4b$ (on multiplie par 4 de chaque côté)
alors $4a - 1 < 4b - 1$ (on enlève 1 de chaque côté)
alors $f(a) < f(b)$

J'ai montré que si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$. f conserve l'ordre donc f est croissante.

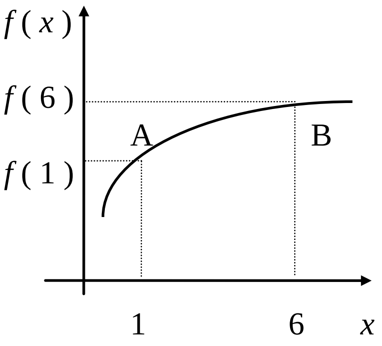
g: $x \mapsto -3x - 4$
Montrons que g est décroissante.
Il faut montrer que si je choisis deux nombres, quels que soient ces nombres, l'image du petit est supérieure à l'image du grand.
J'appelle ces deux nombres a et b et je décide que c'est a le plus petit.

Si $a < b$, alors $-3a > -3b$ rappel: quand on multiplie ou divise par un nombre négatif, il faut changer l'ordre
alors $-3a - 4 > -3b - 4$
alors $g(a) > g(b)$

J'ai montré que si $a < b$, alors $g(a) > g(b)$. g renverse l'ordre donc g est décroissante.

Tout cela est confirmé par le graphique. On constate que la représentation de f est une droite qui monte et que la représentation de g est une droite qui descend.

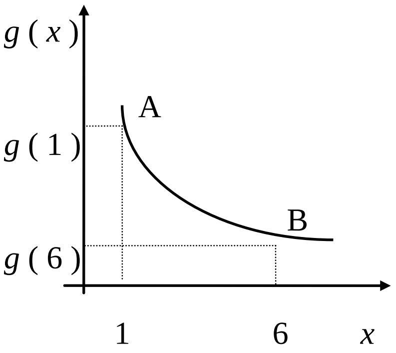
<u>Troisième définition de la croissance</u>



Cette courbe est la représentation de la fonction f qui est croissante.

A est à gauche de B car $1 < 6$.
A est au-dessous de B car la courbe monte donc $f (1) < f (6)$.

Puisque la fonction f est croissante, on peut dire: $1 < 6$ donc $f (1) < f (6)$.
Bien sûr, cela marche avec n'importe quels autres nombres.
Si f est croissante, on peut dire: si $a < b$ alors $f (a) < f (b)$.
La réciproque est vraie donc on peut dire
<u>Définition</u>: f est croissante signifie: si $a < b$ alors $f (a) < f (b)$.
C'est une autre façon de dire qu'une fonction croissante est une fonction qui conserve l'ordre.



Cette courbe est la représentation de la fonction g qui est décroissante.

A est à gauche de B car $1 < 6$.
A est au-dessus de B car la courbe descend donc $g (1) > g (6)$.

Puisque la fonction g est décroissante, on peut dire: $1 < 6$ donc $g (1) > g (6)$.
Bien sûr, cela marche avec n'importe quels autres nombres.
Si f est croissante, on peut dire: si $a < b$ alors $g (a) > g (b)$.
La réciproque est vraie donc on peut dire
<u>Définition</u>: g est croissante signifie: si $a < b$ alors $g (a) > g (b)$.
C'est une autre façon de dire qu'une fonction décroissante est une fonction qui renverse l'ordre.