Fonctions polynômes du second degré

I/ Forme développée

Def: une fonction polynôme du second degré est une fonction du type
$x \mapsto a\,x^2 + b\,x + c$ avec $a \neq 0$.

Ex: $x \mapsto x^2$ (pour cette fonction, $a = 1$; $b = 0$ et $c = 0$).

Ex: $x \mapsto 3\,x^2 - 4\,x + 7$ (pour cette fonction, $a = 3$; $b = -4$ et $c = 7$).

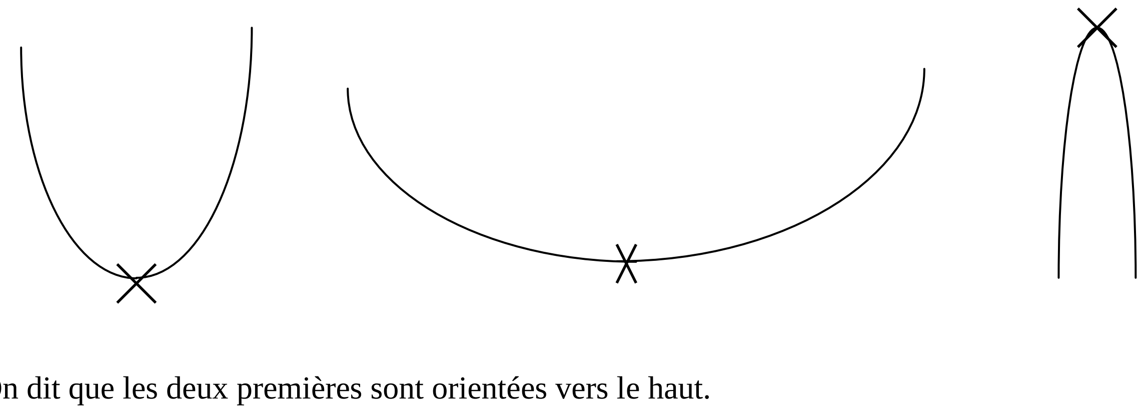
Prop: si $a > 0$, alors le tableau de variations d'une fonction polynôme du second degré est

x		
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Prop: si $a < 0$, alors le tableau de variations d'une fonction polynôme du second degré est

x		
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Toutes les fonctions du second degré sont représentées par une courbe appelée parabole.
Elle a à peu près cette forme:

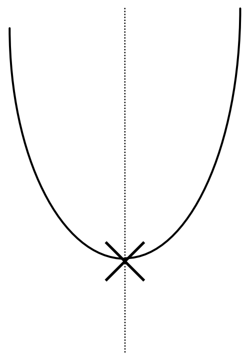


On dit que les deux premières sont orientées vers le haut.
On dit que la dernière est orientée vers le bas.

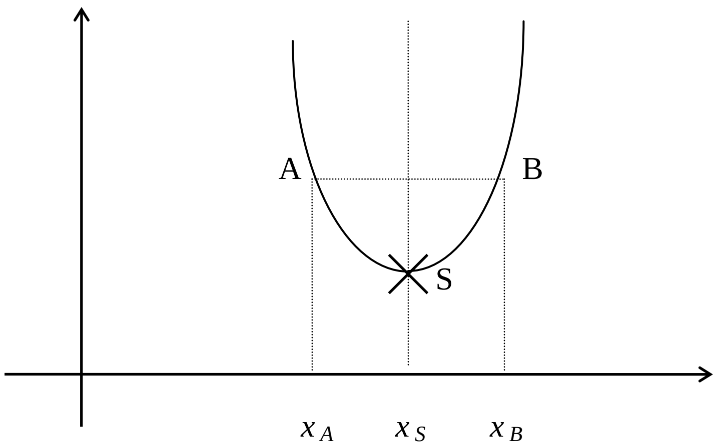
Sur une parabole, un point est particulièrement important: le <u>sommet</u>. Il est coché sur les trois courbes précédentes.
Pour une parabole orientée vers le haut, le sommet est le point le plus bas de la courbe.

Pour une parabole orientée vers le bas, le sommet est le point le plus haut de la courbe.

Prop: la représentation d'une fonction polynôme du second degré est symétrique par rapport à la droite verticale passant par le sommet.

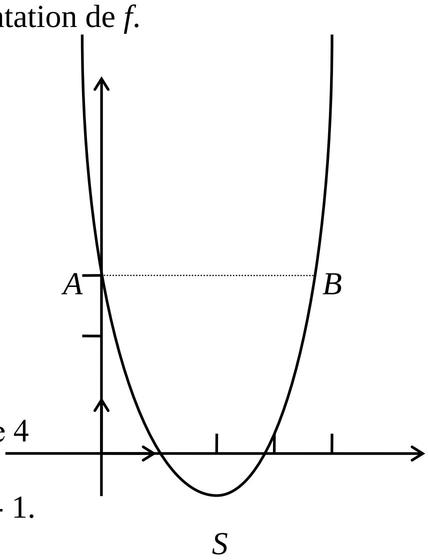


Comment trouver les coordonnées de ce sommet ?
Pour des raisons de symétrie, si deux points de la parabole ont la même abscisse, alors la moyenne des abscisses de ces deux points est l'abscisse du sommet.



L'abscisse de S est la moyenne de l'abscisse de A et de l'abscisse de B.

<u>Exemple</u> : f: $x \mapsto x^2 - 4x + 3$.
$f(0) = 0^2 - 4 \times 0 + 3 = 3$.
Cherchons l'autre point d'ordonnée 3 sur la représentation de f.
Pour cela, il suffit de résoudre
l'équation $f(x) = 3$.



$$\begin{aligned} f(x) = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(x - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

Les points $A(0 ; 3)$ et $B(4 ; 3)$ sont sur la courbe
et ils ont la même abscisse
donc l'abscisse du sommet est la moyenne de 0 et de 4
donc l'abscisse du sommet est 2.
L'ordonnée du sommet est $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1$.

Le sommet de la parabole est S (2 ; - 1).

Une fois qu'on a le sommet, on peut donner le tableau de variations de f.
$a = 1$; $b = -4$ et $c = 3$.
$a > 0$ donc le tableau de variation est de la forme

x			
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

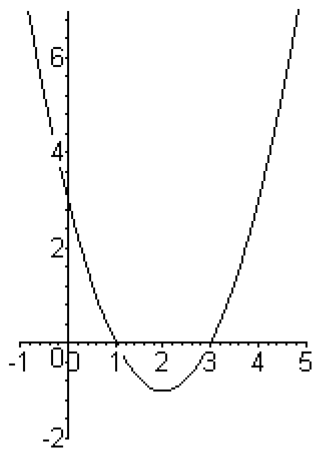
Comme on a les coordonnées du sommet, on peut compléter le tableau de variations :

x		2	
$f(x)$	$\searrow$	- 1	$\nearrow$

Une fois qu'on a le tableau de variations, on peut donner la représentation de f.
Pour tracer correctement, il suffit de calculer les coordonnées de quelques points.

$f(1) = 0$ et $f(0) = 3$

La symétrie fait le reste.



Les racines
Soit f est une fonction polynôme du second degré.
Les solution de l'équation $f(x) = 0$ sont appelées les racines du polynôme.
Les racines sont les nombres dont l'image est 0.

Pour la fonction f: $x \mapsto x^2 - 4x + 3$ que l'on vient de représenter,
1 est une racine car $f(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$.
3 est une autre racine car $f(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$.

Le graphique et le tableau de variations montrent qu'il n'y a pas d'autre racine.

Attention
Pour la fonction f: $x \mapsto x^2 - 4x + 3$, les racines sont des nombres entiers faciles à trouver.
D'habitude, résoudre l'équation $f(x) = 0$ n'est pas aussi facile.

Une équation comme $x^2 - 4x + 3 = 0$ est une équation du second degré et, sauf cas particulier, vous ne savez pas les résoudre.
C'est pourquoi il est utile de présenter les fonctions polynômes du second degré sous d'autres formes que la forme développée.

II/ Forme factorisée

La fonction f: $x \mapsto (x - 1)(x + 2)$ est-elle une fonction polynôme du second degré ?
$(x - 1)(x + 2) = x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2$.
f est donc une fonction polynôme du second degré (avec $a = 1$; $b = 1$ *et* $c = -2$).
Comme d'habitude, la forme factorisée permet

- * de donner le signe de $f(x)$
- * de résoudre l'équation $f(x) = 0$ (trouver les racines).

* Pour étudier le signe, il suffit de faire un tableau de signes.

x		-2		1	
$x - 1$	-		-	0	+
$x + 2$	-	0	+		+
$(x - 1)(x + 2)$	+	0	-	0	+

* Résolution de l'équation $f(x) = 0$:

$$
\begin{aligned}
f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \\
&\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } x + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -2
\end{aligned}
$$

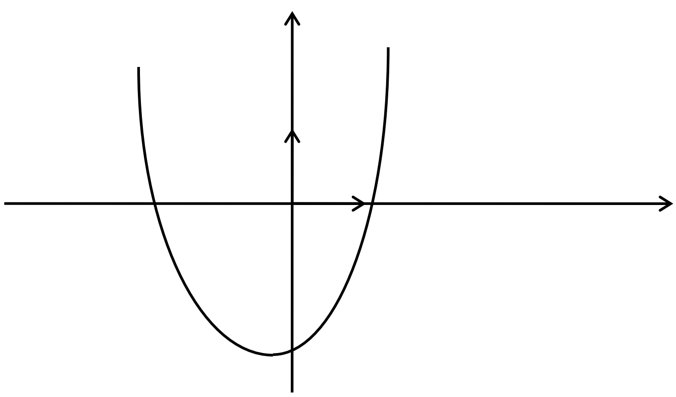
$S = \{ -2 ; 1 \}$

$(x - 1)(x + 2)$ s'annule pour $x = -2$ et pour $x = 1$.

-2 et 1 sont les <u>racines</u> du polynôme $x^2 + x - 2$.

Que peut-on en déduire pour la représentation ?
* Les racines sont -2 et 1 donc la courbe coupe l'axe horizontal aux points d'abscisses -2 et 1.
* $a = 1$ donc $a > 0$ donc la courbe est orientée vers le haut.

La représentation a donc cette allure :

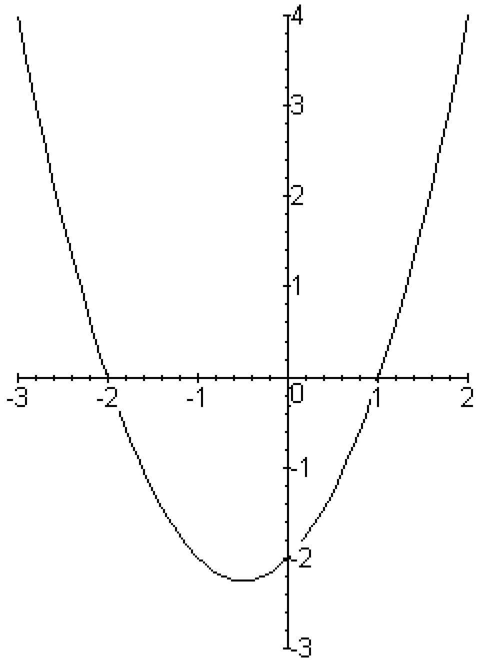


La forme factorisée donne facilement le sommet.
En effet, pour des raisons de symétrie, l'abscisse du sommet est la moyenne des racines.

L'abscisse du sommet est $\frac{-2+1}{2}$ = - $\frac{1}{2}$.

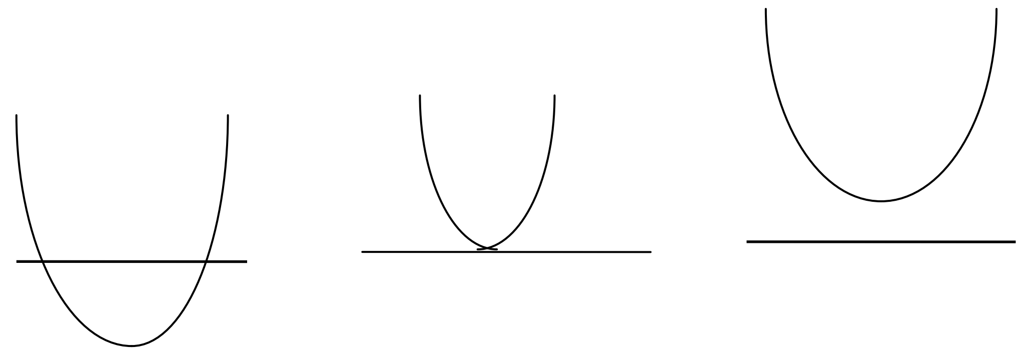
L'ordonnée du sommet est f (- $\frac{1}{2}$) = - $\frac{9}{4}$.

Cela permet de tracer.



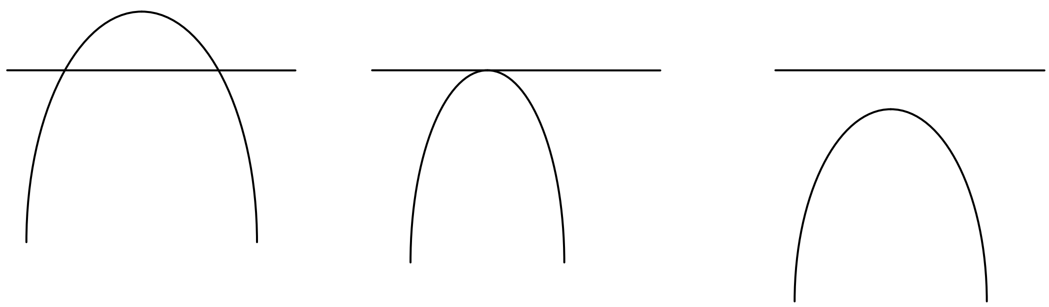
Le nombre de racines se voit clairement sur la représentation : la courbe a deux points communs avec l'axe horizontal donc le polynôme que l'on a représenté a deux racines. Est-ce le cas de tous les polynômes du second degré ?

Propriété : une fonction polynôme du second degré admet 0, 1 ou 2 racines.
On peut le voir sur le graphique :



Deux racines   une racine   pas de racine

Si la parabole est orientée vers le bas, on peut faire le même constat :



Deux racines   une racine   pas de racine

III/ Forme canonique

Exemple : f: $x \mapsto (x - 3)^2 - 4$.
C'est une fonction polynôme du second degré car
$f(x) = (x - 3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 9 - 4 = x^2 - 6x + 5$.
$(x - 3)^2 - 4$ est la forme canonique de la fonction f.

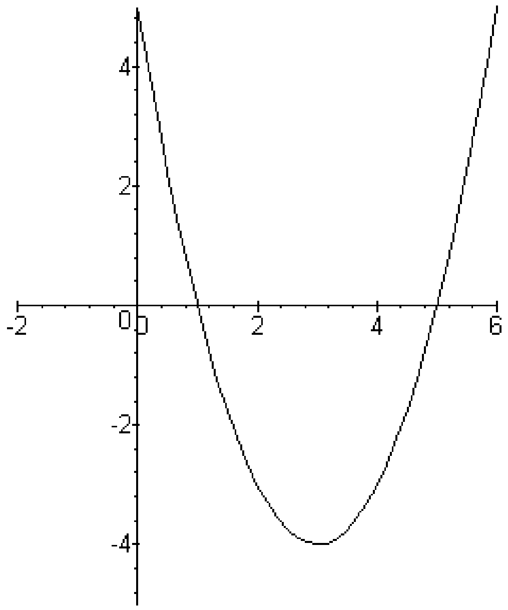
La forme canonique donne
- le minimum ou le maximum (et le sommet de la courbe)
- les racines
- le signe.

Le minimum :
$(x - 3)^2$ est positif donc le minimum de $(x - 3)^2$ est 0, atteint pour $x = 3$
donc le minimum de $(x - 3)^2 - 4$ est $- 4$, atteint pour $x = 3$.
Les coordonnées du sommet de la représentation sont donc $(3 ; - 4)$.

Les racines :
Les racines sont les nombres dont l'image est 0, on les trouve en résolvant l'équation
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 3)^2 - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x - 3)^2 = 4$$

$\Leftrightarrow \quad x - 3 = 2$ ou $x - 3 = - 2$
$\Leftrightarrow \quad x = 5$ ou $x = 1$
Les racines sont 1 et 5.

La représentation :
Comme tout à l'heure, le minimum et les racines permettent de représenter *f*.



Le signe :
Quand on a les racines, le signe saute aux yeux sur le graphique

x		1		5	
$f(x)$	+	0	-	0	+

On peut aussi déterminer le signe par le calcul :
La forme canonique permet de factoriser :
$(x - 3)^2 - 4 = (x - 3)^2 - 2^2 = (x - 3 - 2) (x - 3 + 2) = (x - 5) (x - 1)$
Il ne reste plus qu'à faire un tableau de signes :

x		1		5	
$x - 1$	-	0	+		+
$x - 5$	-		-	0	+
$(x - 1) (x + 2)$	+	0	-	0	+

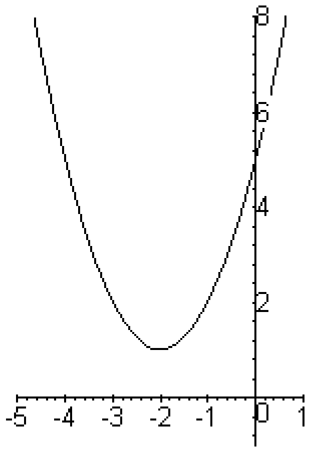
Exemple : f: $x \mapsto x^2 + 4x + 5$.
En seconde on ne vous demandera pas de trouver la forme canonique.
Pour ceux que cela intéresse, voici comment on fait:
$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 - 4 + 5 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + 5 = (x + 2)^2 + 1$.

$(x + 2)^2 + 1$ est la forme canonique de $x^2 + 4x + 5$.

Le signe : un carré est positif donc $(x + 2)^2 \geq 0$ donc $(x + 2)^2 + 1 > 0$ et on a le signe :
$f(x)$ est positif pour tout x.

Le minimum :
$(x + 2)^2$ est positif donc le minimum de $(x + 2)^2$ est 0, atteint pour $x = -2$.
On en déduit que le minimum de $(x + 2)^2 + 1$ est 1, atteint pour $x = -2$.
- 2 et 1 sont les coordonnées du sommet de la représentation.

Les racines :
$(x + 2)^2 + 1 > 0$ pour tout x
donc aucune valeur de x n'annule $(x + 2)^2 + 1$
donc f n'a pas de racine.



IV/ Autres exemples

Certains polynômes du second degré n'ont pas de racine, par exemple $x^2 + 1$.
$x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 > 0$ donc $x^2 + 1 \neq 0$, pour tout x.

Certains polynômes du second degré ont deux racines, par exemple $(x + 2)(x + 3)$ dont les racines sont -2 et -3.
Les racines de $x^2 + 5x + 6$ sont -2 et -3.

Certains polynômes du second degré ont une racine, par exemple $(x - 3)^2$ qui ne s'annule qu'en $x = 3$.
La racine de $x^2 - 6x + 9$ est 3.

Vous pouvez demander à la calculatrice l'allure des représentations.

V/ Exercices

On donne la fonction f: $x \mapsto - x^2 + 4x - 5$.
1/ Donner le tableau de variations de f.
2/ Représenter f.

1/ $a = -1$ donc $a < 0$
donc la parabole est orientée vers le bas et le tableau de variation est de la forme

x			
$f(x)$	↗		↘

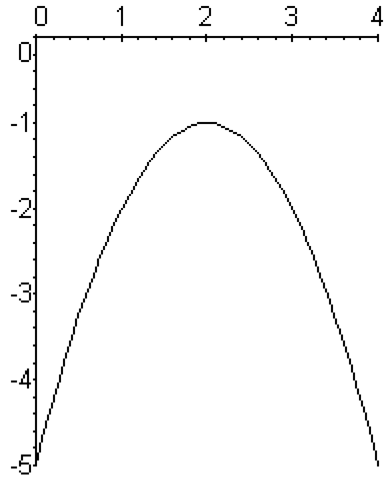
Pour trouver l'abscisse du sommet, cherchons deux points de la courbe qui ont la même ordonnée.
$f(0) = -5$ donc A (0 ; - 5) appartient à la courbe.
Cherchons l'autre point d'abscisse sur la courbe.
Il suffit de résoudre l'équation $f(x) = -5 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 5 = -5$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(-x + 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -x + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4$$

donc les points A (0 ; - 5) et B (4 ; - 5) appartiennent à la courbe
donc l'abscisse du sommet de la parabole est la moyenne de 0 et de 4
donc l'abscisse du sommet de la parabole est 2.
L'ordonnée du sommet est $f(2) = -2^2 + 4 \times 2 - 5 = -4 + 8 - 5 = -1$.
Le tableau de variations est donc

x		2	
$f(x)$	↗	- 1	↘

2/ Cela permet de tracer la parabole.



On donne la fonction f: $x \mapsto (x + 1)(x - 3)$.

1/ Donner le tableau de variations de *f*.
2/ Représenter *f*.

1/ Il est inutile de connaître les coefficients *a*, *b* et *c*. Seul le signe de *a* est utile.
On commence le développement: $(x + 1) (x - 3) = x^2 - 3x$ ...
donc $a = 1$ donc $a > 0$
donc la parabole est orientée vers le haut et le tableau de variation est de la forme

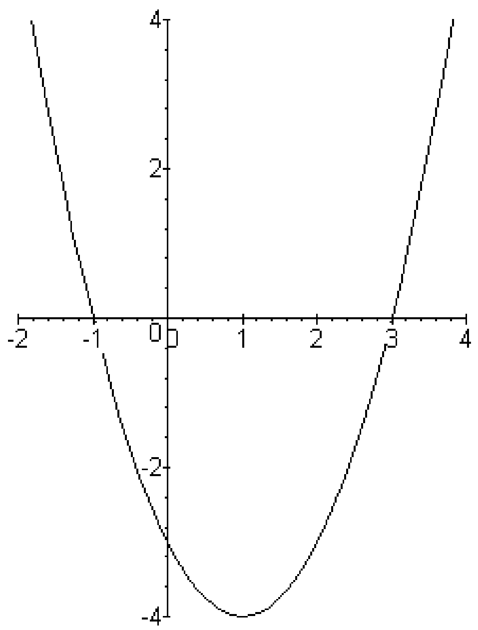
x			
$f (x)$	↘		↗

Les racines sont - 1 et 3 car en remplaçant *x* par - 1 ou par 3, $(x + 1) (x - 3) = 0$.
L'abscisse du sommet est la moyenne des racines: $\frac{-1+3}{2} = 1$.
L'ordonnée du sommet est $f (1) = (1 + 1) (1 - 3) = - 4$.

Le tableau de variations est donc

x		1	
$f (x)$	↘	- 4	↗

2/ La courbe descend donc jusqu'au sommet puis remonte.
Les racines sont - 1 et 3 donc la courbe passe par les points A (- 1 ; 0) et B (3 ; 0).
On peut aussi placer le points C (0 ; - 3) et peut tracer la parabole.



<u>On donne la fonction *f*: $x \mapsto (x - 2)^2 + 1$.</u>
1/ Donner le tableau de variations de *f*.
2/ Représenter *f*.

1/ Il est inutile de connaître les coefficients *a*, *b* et *c*. Seul le signe de *a* est utile.
On commence le développement: $(x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x$ ...
donc $a = 1$ donc $a > 0$
donc la parabole est orientée vers le haut et le tableau de variation est de la forme

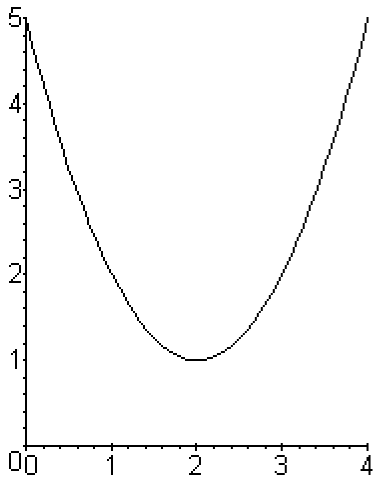
x	
$f(x)$	↘ ↗

Ce tableau montre que la fonction *f* admet un minimum. Cherchons ce minimum.
$(x - 2)^2$ est positif donc le minimum de $(x - 2)^2$ est atteint si $(x - 2)^2 = 0$,
donc le minimum de $(x - 2)^2$ est 0 et il est atteint pour $x = 2$
donc le minimum de $(x - 2)^2 + 1$ est 1 et il est atteint pour $x = 2$.

Le tableau de variations est donc

x	2
$f(x)$	↘ 1 ↗

2/ La courbe descend donc jusqu'au sommet puis remonte.
Pour tracer correctement, il suffit de calculer $f(0) = (0 - 2)^2 + 1 = 5$.



On donne la fonction f: $x \mapsto -2(x+1)^2 + 4$.

1/ Donner le tableau de variations de f.

2/ Représenter f.

1/ Il est inutile de connaître les coefficients a, b et c. Seul le signe de a est utile.

On commence le développement: $-2(x+1)^2 + 4 = -2x^2 - 4x$ ...

donc $a = -2$ donc $a < 0$

donc la parabole est orientée vers le bas et le tableau de variation est de la forme

x		
$f(x)$	↗	↘

Ce tableau montre que la fonction f n'a pas de minimum mais un maximum. Cherchons ce maximum.

$-2(x+1)^2$ est négatif

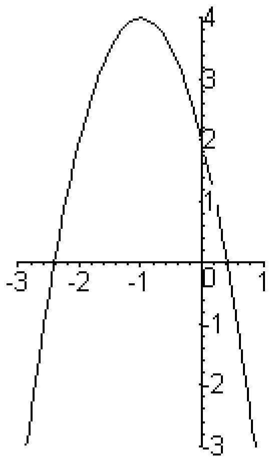
donc le maximum de $-2(x+1)^2$ est 0 et il est atteint pour $x = -1$

donc le maximum de $-2(x+1)^2 + 4$ est 4 et il est atteint pour $x = -1$

Le tableau de variations est donc

x		-1	
$f(x)$	↗	4	↘

2/ Pour tracer correctement, il suffit de calculer $f(0) = -2(0+1)^2 + 4 = -2 \times 1 + 4 = 2$.



Si on a les racines, c'est encore mieux, et ce n'est pas bien difficile:

$-2(x+1)^2 + 4 = 0 \iff -2(x+1)^2 = -4$

$\iff (x+1)^2 = 2$ (on divise par - 2)

$\iff x + 1 = -\sqrt{2}$ ou $x + 1 = \sqrt{2}$

$\iff x = -1 - \sqrt{2}$ ou $x = -1 + \sqrt{2}$

Les racines de $-2(x+1)^2 + 4$ sont $-1 - \sqrt{2} \approx -2{,}4$ et $-1 + \sqrt{2} \approx 0{,}4$

On donne la fonction f: $x \mapsto (x-3)^2$.

1/ Donner les racines de f.

2/ Donner le signe de f.

3/ Donner le tableau de variations de f.

4/ Représenter f.

1/ $(x-3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 3$

La racine de f est 3.

2/ Un carré est positif donc $(x-3)^2 \geq 0$.

Le signe de f est donné par le tableau suivant :

x		3	
$f(x)$	+	0	+

3/ $(x-3)^2 \geq 0$ donc le minimum de $(x-3)^2$ est 0, il est atteint pour $x = 3$.

x		3	
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$