Calcul

1/ Ordre entre les opérations

Commencer par les opérations entre parenthèses.
Appliquer ensuite les règles de priorité (d'abord les puissances puis les multiplications et les divisions puis les additions et les soustractions).
Effectuer les opérations qui restent en commençant pas la gauche.

$(1 + 3) \times 5 = 4 \times 5 = 20$
$1 + 3 \times 5 = 1 + 15 = 16$

$8 - 3 - 1 = 5 - 1 = 4$
$8 - (3 - 1) = 8 - 2 = 6$

$- 3^2 = - 9$ car on commence par élever au carré et on ensuite prend l'opposé (prendre l'opposé, c'est multiplier par - 1).
$(- 3)^2$ est le carré de - 3 et comme un carré est positif, $(- 3)^2 = 9$.

<u>Attention</u>, si vous cherchez le carré de - 3, le résultat est 9.
À la calculatrice, il faut taper les parenthèses.

<u>Attention</u>, $\frac{2+3}{5} = \frac{5}{5} = 1$. On commence par l'addition alors qu'elle n'est pas prioritaire. Le trait de fraction joue le rôle des parenthèses, c'est comme si on écrivait (2 + 3) **:** 5.
Si l'on veut commencer par la division, il faut écrire $2 + \frac{3}{5} = 2 + 0,6 = 2,6$.

De même, $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ car $\sqrt{\ }$ joue le rôle des parenthèses.
Si l'on veut commencer par la racine, il faut écrire $\sqrt{9} + 16 = 3 + 16 = 19$.

De même, $4^{2+1} = 4^3 = 64$ car l'exposant joue le rôle des parenthèses.
Si l'on veut commencer par la puissance, il faut écrire $4^2 + 1 = 16 + 1 = 17$.

2/ Opposé, inverse

Définition : deux nombres sont <u>opposés</u> si leur somme est 0.
Par exemple, - 3 et 3 sont opposés car $- 3 + 3 = 0$.
Définition : soustraire, c'est ajouter l'opposé : $3 - 2 = 3 + (- 2)$.

Définition : deux nombres sont <u>inverses</u> si leur produit est 1.

Par exemple, 2 et $\frac{1}{2}$ sont inverses car $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

De même, $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{3}$ sont inverses car $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$.

Définition : diviser, c'est multiplier par l'inverse.

Par exemple, $\frac{4}{3} = 4 \times \frac{1}{3}$ $\qquad \dfrac{4}{\frac{3}{5}} = 4 \times \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$ $\qquad \dfrac{\frac{4}{3}}{5} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{15}$

$$\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

En multipliant 0 par n'importe quel nombre, on trouve 0
donc, en multipliant 0 par n'importe quel nombre, on ne trouve pas 1
donc <u>0 n'a pas d'inverse</u>
donc on ne peut pas diviser par 0.
La division par 0 est une opération qui ne donne pas de résultat.

3/ Équations

Définition : des <u>équations équivalentes</u> sont des équations qui ont les mêmes solutions.
$2x - 1 = 7$ et $2x = 8$ sont équivalentes car elles ont la même solution : 4.
On écrit : $2x - 1 = 7 \Leftrightarrow 2x = 8$.

<u>Règle</u> : pour passer d'une équation à une équation équivalente, on fait la même opération de chaque côté du signe « = ».

Ex : $x - 5 = 3 \downarrow + 5$ $\qquad x + 3 = 2 \downarrow - 3$ $\qquad 2x = 8 \downarrow : 2$
$\Leftrightarrow x = 8$ $\qquad \Leftrightarrow x = -1$ $\qquad \Leftrightarrow x = 4$

$\frac{x}{5} = 3 \downarrow \times 5$ $\qquad \frac{3x}{5} = 4 \downarrow \times \frac{5}{3}$
$\Leftrightarrow x = 15$ $\qquad \Leftrightarrow x = \frac{20}{3}$

Comment fait-on pour trouver la bonne opération ?
Dans tous les cas, on doit arriver à une égalité avec *x* tout seul d'un côté de l'égalité (par exemple à gauche) et pas de *x* de l'autre côté de l'égalité.

Pour l'équation $x - 5 = 3$, il faut trouver une opération qui transforme $x - 5$ en x.
Il me semble évident que pour transformer x en $x - 5$, on soustrait 5.

$$x \xrightarrow{-5} x - 5$$

Pour faire le passage dans l'autre sens, on ajoute 5.

$$x \underset{+5}{\overset{-5}{\rightleftarrows}} x - 5$$

On voit alors que pour transformer $x - 5$ en x, on peut ajouter 5.

De même, pour l'équation $x + 3 = 2$, il faut trouver une opération qui transforme $x + 3$ en x.

$$x \underset{-3}{\overset{+3}{\rightleftarrows}} x + 3$$

Finalement, pour transformer $x + 3$ en x, on peut soustraire 3.

On vient d'utiliser des additions et des soustractions.
On va utiliser de la même façon des multiplications et des divisions.

Pour l'équation $2\,x = 8$, il faut trouver une opération qui transforme $2\,x$ en x.
Il me semble évident que pour transformer x en $2\,x$, on multiplie par 2.

$$x \xrightarrow{\times 2} 2\,x$$

Pour faire le passage dans l'autre sens, on divise par 2.

$$x \underset{:\,2}{\overset{\times 2}{\rightleftarrows}} 2\,x$$

On voit alors que pour transformer $2\,x$ en x, on peut diviser par 2
donc, pour l'équation $2\,x = 8$, on peut diviser par 2 à gauche et à droite du signe « = ».

Autre exemple :

$$x \underset{\times 5}{\overset{:5}{\rightleftarrows}} \frac{x}{5}$$

donc, pour l’équation $\frac{x}{5} = 3$, on peut multiplier par 5 à gauche et à droite du signe « = ».

$$x \underset{:\frac{3}{5}}{\overset{\times\frac{3}{5}}{\rightleftarrows}} \frac{3x}{5}$$

Vous savez que diviser, c’est multiplier par l’inverse.
Diviser par, c’est $\frac{3}{5}$, c’est donc multiplier par $\frac{5}{3}$.

Attention, les opérations autorisées sont additions, soustractions, multiplications et divisions.
Avec d’autres opérations, cela ne marche pas.

Ex : $x^2 = 9 \quad \downarrow \sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow x = 3$

Ce passage est faux car les deux équations ne sont pas équivalentes.
En effet

l’équation $x = 3$ a une solution : 3

l’équation $x^2 = 9$ a deux solutions : - 3 et 3.

L’erreur vient du mauvais choix de l’opération : $\sqrt{\ }$ ne permet pas de passer d’une équation à une équation équivalente. Ce n’est pas avec $\sqrt{\ }$ qu’on peut résoudre une équation.

Ex : résoudre $\frac{x+3}{7} = x - 5 \quad \downarrow \times 7$

$\Leftrightarrow x + 3 = 7x - 35 \quad \downarrow + 3$

$\Leftrightarrow x = 7x - 38 \quad \downarrow - 7x$

$\Leftrightarrow -6x = -38 \quad \downarrow : (-6)$

$\Leftrightarrow x = \frac{-38}{-6}$

$\Leftrightarrow x = \frac{19}{3} \qquad S = \left\{\frac{19}{3}\right\}$

Ex : résoudre $-\dfrac{2x-5}{3} = \dfrac{x}{7}$ $\quad \times 3$

$\Leftrightarrow\ -(2x-5) = \dfrac{3x}{7}$ $\quad$ Attention, le trait de fraction joue le rôle des parenthèses.

$\Leftrightarrow\ -2x+5 = \dfrac{3x}{7}$ $\quad \times 7$

$\Leftrightarrow\ -14x+35 = 3x$

$\Leftrightarrow\ -14x = 3x - 35$

$\Leftrightarrow\ -17x = -35$

$\Leftrightarrow\ x = \dfrac{-35}{-17}$ $\qquad$ $S = \left\{\dfrac{35}{17}\right\}$

4/ Inéquations

Règles :

1/ pour passer d'une équation à une équation équivalente, on fait la même opération de chaque côté du signe « < » ou du signe « > ».

2/ quand on multiplie ou divise par un nombre négatif, on change le sens (« < » devient « > » et réciproquement).

Ex: $-3 < 7$ est vrai.

Si je multiplie par -2, j'obtiens $6 > -14$.

Si j'oublie de changer le sens, j'obtiens $6 < -14$ qui est faux.

Ex: $-2x < 7$ $\quad : (-2)$

$\Leftrightarrow\ x > -\dfrac{7}{2}$

$S = \left] -\dfrac{7}{2}\ ; +\infty \right[$

$-\dfrac{x}{3} \geq 6$ $\quad \times (-3)$

$\Leftrightarrow\ x \leq -2$

$S =]-\infty\ ; -2]$

Ex: $-x > 5$ $\quad \times (-1)$

$\Leftrightarrow\ x < -15$

$S =]-\infty\ ; -15[$

5/ Développement, factorisation

$2 \times 3 + 2 \times 5 = 2(3+5)$

$2 \times 3 + 2 \times 5$ est la somme de 2×3 et de 2×5.

$2(3+5)$ est le produit de 2 et de $3+5$.

Écrire que $2 \times 3 + 2 \times 5 = 2(3+5)$ revient à transformer une somme en produit.

On dit que 2 est un facteur commun.

Ex: $3x^2 - 6x = 3x \times x - 3x \times 2 = 3x(x-2)$.

Définition: <u>factoriser</u>, c'est transformer une somme en produit.

Définition: <u>développer</u>, c'est transformer un produit en somme.

Il y a deux façons de factoriser

- utiliser un facteur commun
- utiliser une identité

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
$a^2 + b^2$ ne se factorise pas.

Ex: $12x - 20 = 4 \times 3x - 4 \times 5 = 4(3x-5)$ 4 est facteur commun

$5x^3 - x = x \times 5x^2 - x \times 1 = x(5x^2 - 1)$ x est facteur commun

$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = (2x+3)^2$

$9 - x^2 = 3^2 - x^2 = (3-x)(3+x)$

$9 + x^2$ ne se factorise pas.

Une factorisation complète peut demander plusieurs étapes.

Pour factoriser $4x^2 - 16$, on peut commencer par mettre 4 en facteur :
$4x^2 - 16 = 4 \times x^2 - 4 \times 4 = 4(x^2 - 4)$
Ce qui est entre parenthèses peut se factoriser par une identité :
$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$
donc $\underline{4x^2 - 16 = 4(x+2)(x-2)}$

Pour factoriser $4x^2 - 16$, on peut aussi commencer par utiliser une identité :
$4x^2 - 16 = (2x)^2 - 4^2 = (2x+4)(2x-4)$
On peut mettre 2 en facteur dans chacune des parenthèses :
$2x + 4 = 2 \times x + 2 \times 2 = 2(x+2)$
$2x - 4 = 2 \times x - 2 \times 2 = 2(x-2)$
donc $4x^2 - 16 = 2(x+2) \times 2(x-2) = 2 \times 2(x+2)(x-2)$
donc $\underline{4x^2 - 16 = 4(x+2)(x-2)}$

Plus difficile

$x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

$x^4 + 16$ ne se factorise pas.

$x^3 + 6x^2 + 9x = x(x^2 + 6x + 9) = x(x + 3)^2$

$$\begin{aligned}(x - 3)(5x + 3) - (2x - 6)(x^2 - 4) \\ &= (x - 3)(5x + 3) - 2(x - 3)(x^2 - 4) \\ &= (x - 3)(5x + 3 - 2(x^2 - 4)) \\ &= (x - 3)(5x + 3 - 2x^2 + 8) \\ &= (x - 3)(-2x^2 + 5x + 11)\end{aligned}$$

$x^2 + 4x^3 = x^2 \times 1 + 4x \times x^2 = x^2(4x + 1)$

$$\begin{aligned}(6x + 3) + (4x^2 + 4x + 1) &= 3(2x + 1) + (2x + 1)^2 \\ &= (2x + 1)(3 + (2x + 1)) \\ &= (2x + 1)(2x + 4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2x - 5)^2 - (3 - x)^2 &= (2x - 5 + (3 - x)) \times (2x - 5 - (3 - x)) \\ &= (2x - 5 + 3 - x) \times (2x - 5 - 3 + x) \\ &= (x - 2)(3x - 8)\end{aligned}$$